Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Pisa, 22 maggio 2023

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x+1}{2-x}\right)$$

determinandone insieme di definizione, continuità e derivabilità, eventuali asintoti, eventuali punti di massimo e minimo locali, estremi superiore e inferiore o massimo e minimo, intervalli di concavità e convessità. Tracciare un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione

La funzione arcotangente è definita in tutto $\mathbb{R}$ quindi dobbiamo controllare solo quando è definito il suo argomento, quindi per ogni $x \neq 2$. La funzione è derivabile (quindi anche continua) in tutto il suo insieme di definizione. Vediamo ora i limiti.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4},$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \arctan\left(\frac{3}{0^+}\right) = \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \arctan\left(\frac{3}{0^-}\right) = \arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}.$$

Dal primo limite ricaviamo che la funzione ha un asintoto orizzontale di equazione $y = -\frac{\pi}{4}$ sia per x che tende a $-\infty$ che per x che tende a $+\infty$. Non ci sono altri tipi di asintoti.

Calcoliamo ora la derivata.

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{2-x}\right)^2}\frac{2-x+x+1}{(2-x)^2} = \frac{3}{(2-x)^2+(x+1)^2} = \frac{3}{2x^2-2x+5}.$$

Osserviamo subito che $f'(x) > 0$ per ogni x, quindi f è strettamente crescente in $(-\infty, 2)$ e in $(2, +\infty)$. Non ci sono punti di massimo o di minimo locali. Dato che $-\frac{\pi}{2} \arctan t \frac{\pi}{2}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, possiamo affermare che $-\frac{\pi}{2} < f(x) < \frac{\pi}{2}$ per ogni $x \neq 2$. Ne segue che f è limitata e, dai risultati sui limiti per $x \to 2$, abbiamo anche che

$$\inf(f) = -\frac{\pi}{2}, \qquad \sup(f) = \frac{\pi}{2}.$$

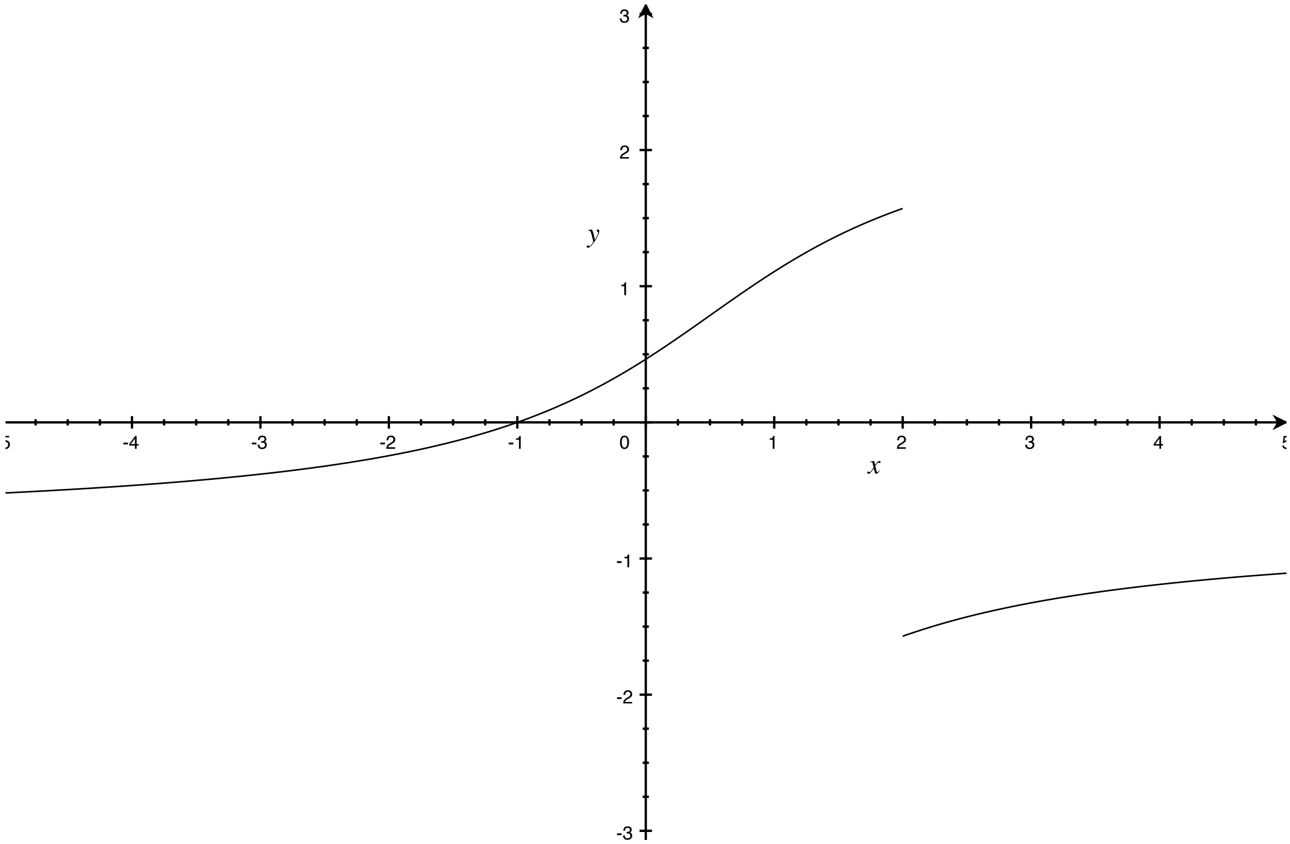
Calcoliamo ora la derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{-3(4x-2)}{(2x^2-2x+5)^2}.$$

Per la convessità studiamo il segno della derivata seconda:

$$f''(x) > 0 \iff -3(4x-2) > 0 \iff 4x-2 < 0 \iff x < \frac{1}{2}$$

ne segue che f è strettamente convessa in $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$, strettamente concava in $\left[\frac{1}{2}, 2\right)$ e strettamente concava in $(2, +\infty)$. Il punto $x = \frac{1}{2}$ è di flesso.



Esercizio 2 Determinare tutti i punti stazionari della funzione $f(x, y) = 2x + 4y + \frac{1}{xy}$, e la loro natura (punto di massimo locale, punto di minimo locale, o punto di sella).

Determinare inoltre (giustificando la risposta) se la funzione f ammette minimo assoluto sul suo dominio, oppure no.

Soluzione

La funzione è definita per $x \neq 0$ e $y \neq 0$, quindi $\mathbb{R}^2$ privato degli assi cartesiani. Calcoliamo le derivate parziali:

$$f_x = 2 - \frac{1}{x^2 y}$$

$$f_y = 4 - \frac{1}{xy^2}$$

quindi i punti stazionari sono le soluzioni del sistema di equazioni

$$\begin{cases} 2 - \frac{1}{x^2 y} = 0 \\ 4 - \frac{1}{xy^2} = 0. \end{cases}$$

Dalla prima equazione otteniamo

$$2 = \frac{1}{x^2 y} \iff y = \frac{1}{2x^2}$$

e, sostituendo nella seconda equazione abbiamo

$$4 - \frac{4x^4}{x} = 0 \iff 4 = 4x^3 \iff x = 1.$$

Sostituendo questo risultato nella prima equazione abbiamo

$$y = \frac{1}{2}.$$

L'unico punto stazionario della funzione è quindi $P = \left(1, \frac{1}{2}\right)$. Calcoliamo ora le derivate seconde:

$$f_{xx} = \frac{2}{x^3 y}$$

$$f_{xy} = \frac{1}{x^2y^2}$$

$$f_{yy} = \frac{2}{xy^3}.$$

Valutiamo ora queste derivate nel punto P:

$$f_{xx}(P) = \frac{2}{1 \cdot \frac{1}{2}} = 4, \qquad f_{xy}(P) = \frac{1}{1 \cdot \frac{1}{4}} = 4, \qquad f_{yy}(P) = \frac{2}{1 \cdot \frac{1}{8}} = 16.$$

La matrice Hessiana in P risulta quindi

$$Hf(P) = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}.$$

Il determinante è $4 \cdot 16 - 4 \cdot 4 = 64 - 16 = 48 > 0$ e $f_{xx}(P) = 4 > 0$ quindi la matrice è definita positiva, pertanto il punto P è di minimo locale. Osserviamo ora che

$$\lim_{x \to -\infty} f(x, 1) = \lim_{x \to -\infty} 2x + 4 - \frac{1}{x} = -\infty$$

quindi f non è limitata inferiormente e non ammette minimo assoluto.

Esercizio 3 Studiare il comportamento, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, dell'integrale

$$\int_0^1 \frac{(\arctan(x/2))^\alpha}{x^3(\sin(x-1))^5}\, dx.$$

Soluzione

Poniamo

$$f(x) = \frac{(\arctan(x/2))^\alpha}{x^3(\sin(x-1))^5}.$$

Osserviamo che $f(x) < 0$ per ogni $x \in (0, 1)$, quindi l'integrale improprio esiste sicuramente, convergente o divergente negativamente. Poniamo ora $g(x) = \frac{1}{(x-1)^5}$ e osserviamo che

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(\arctan(x/2))^\alpha}{x^3} \left(\frac{(x-1)}{\sin(x-1)}\right)^5 = \left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right)^\alpha.$$

Dato che

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^5} = -\infty$$

dal criterio del confronto asintotico segue che

$$\int_0^1 f(x)\, dx = -\infty$$

per qualunque valore di $\alpha \in \mathbb{R}$.